

M. InfanteExercice 1 6 pts

1) $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(x) = e^{-\|x\|^2} \cdot x$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Montrons que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ et calculons sa différentielle.

* Soit $\theta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\theta(x) = \|x\|^2 = \langle x, x \rangle$, $x \in \mathbb{R}^n$. On a θ est C^1 sur $\mathbb{R}^n$ et $D\theta(x)h = 2\langle x, h \rangle$, $\forall x, h \in \mathbb{R}^n$.

* Soit $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = e^{-\|x\|^2}$. On a $g = \alpha \circ \theta$ avec $\alpha(t) = e^{-t}$. g est la composée de deux fonctions C^1 donc elle est C^1 et on a $\forall (x, h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} Dg(x)h &= D\alpha(\theta(x)) [D\theta(x)h] \\ &= \alpha'(\theta(x)) [D\theta(x)h] \\ &= -e^{-\theta(x)} D\theta(x)h \\ &= -2e^{-\|x\|^2} \langle x, h \rangle \end{aligned}$$

* Soient les fonctions $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = (e^{-\|x\|^2}, x)$ et $b: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $b(t, x) = tx$. On a $f = b \circ \varphi$.

b est bilinéaire continue donc b est C^1 ; φ est C^1 car ses coordonnées sont C^1 .

Conclusion: f est C^1 et on a pour tout $(x, h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

§

$$Df(n)h = Db(\varphi(n)) [D\varphi(n)h]$$

$$= Db(e^{-\|x\|^2}, x) (-2e^{-\|x\|^2} \langle x, h \rangle, h)$$

$$= b(-2e^{-\|x\|^2} \langle x, h \rangle, x) + b(e^{-\|x\|^2}, h)$$

$$Df(n) \cdot h = -2e^{-\|x\|^2} \langle x, h \rangle x + e^{-\|x\|^2} h$$

1

2) $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < \frac{1}{\sqrt{2}}\}$. Montrons que $\text{Ker } Df(n) = \{0\}, \forall x \in B$

$$\text{On a } h \in \text{Ker } Df(n) \Leftrightarrow Df(n)h = 0$$

$$\Leftrightarrow h - 2 \langle x, h \rangle x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \langle x, h \rangle x = h.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne

$$\|h\| = 2 |\langle x, h \rangle| \|x\| \leq 2 \|h\| \|x\|^2$$

$$\Rightarrow \|h\| (1 - 2\|x\|^2) \leq 0 \text{ et comme } \|x\| < \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ on obtient}$$

$$\|h\| \leq 0 \text{ et } h = 0$$

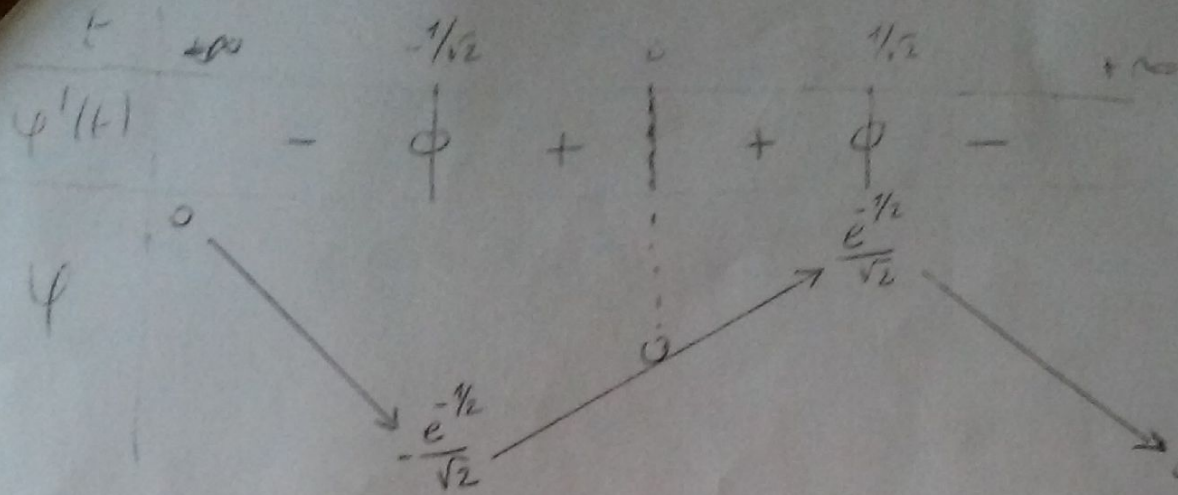
D'où $\text{Ker } Df(n) = \{0\}$. Ainsi $Df(n)$ est injective
donc inversible et ceci pour tout $x \in B$.

1

$$3) a) \varphi(t) = t e^{-t^2}, t \in \mathbb{R}. \text{ On a } \varphi'(t) = e^{-t^2} (1 - 2t^2).$$

On a le tableau de variation suivant:

4



1/2

ϕ est une bijection de $[0, 1/\sqrt{2}]$ sur $[0, \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}}]$

3) Soit $(x, y) \in B^2$ / $f(x) = f(y)$. Il vient que $e^{-\|x\|^2} = e^{-\|y\|^2}$.

Donc $\phi(\|x\|) = \phi(\|y\|)$ avec $\|x\|$ et $\|y\|$ dans $[0, 1/\sqrt{2}]$.

ϕ étant injective sur B , on obtient que $\|x\| = \|y\|$ et l'égalité $e^{-\|x\|^2} = e^{-\|y\|^2}$ nous donne $x = y$.

Concl : f est injective sur B .

1) $\forall x \in B$ on a $df(x)$ est inversible et f est injective sur B .
Le théorème d'inversion local (forme globale) nous donne que f est un C^1 -difféomorphisme de B sur $f(B)$.

D'après 3/a) On montre par double inclusion que

$$f(B) = B(0, \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}})$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}} \right\}$$

Exercice 2 6 pts

1) $f: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$, $f(A) = A - \frac{1}{2}(A^2 - B)$, $A \in M_n$

considérons la fonction $g: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ définie par $g(A) = A^2$. On a g est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$ et

on a $\forall A, H \in M_n(\mathbb{R})$, $Dg(A)H = AH + HA$ (Var TD)

D'où f est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$ et on a

$\forall A, H \in M_n(\mathbb{R})$, $Df(A)H = H - \frac{1}{2}(AH + HA)$

2) $E = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \|I - A\| \leq \frac{1}{2}\}$.

a) Soit $A \in E$. D'après 1) on a $\forall H \in M_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} Df(A)H &= \frac{1}{2}H + \frac{1}{2}H - \frac{1}{2}AH - \frac{1}{2}HA \\ &= \frac{1}{2}(I - A)H + \frac{1}{2}H(I - A) \end{aligned}$$

et

$$\|Df(A)H\| \leq \frac{1}{2}\|I - A\|\|H\| + \frac{1}{2}\|H\|\|I - A\|$$

$$\leq \|I - A\|\|H\|$$

$$\leq \frac{1}{2}\|H\| \text{ car } A \in E.$$

b) E est tout convexe, on obtient d'après le TAF que

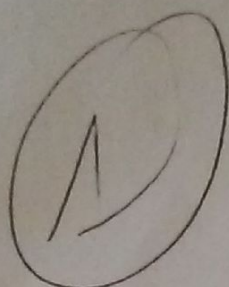
$$\|f(x) - f(y)\| \leq \frac{1}{2}\|x - y\|, \forall x, y \in E.$$

Soit $B \in E$

5/

$$\forall A \in E, \text{ on a } \|f(A) - I\| = \|f(A) - f(I) + f(I) - I\|$$

$$\leq \|f(A) - f(I)\| + \|f(I) - I\|$$



$$\leq \frac{1}{2} \|A - I\| + \frac{1}{2} \|I - B\|$$

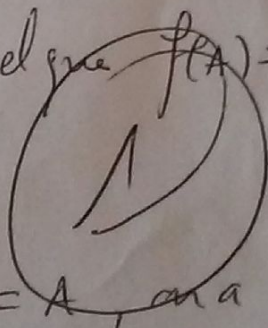
$$\leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

On a $\|f(A) - I\| \leq \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $\underline{f(A) \in E}$, $\forall A \in E$

Ceci nous montre que $f(E) \subset E$.

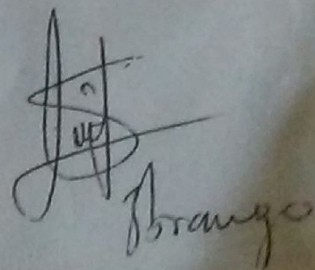
3/ On a $f(E) \subset E$. $f: E \rightarrow E$ est une fonction contractante
 E est fermé donc complet et le théorème de point fixe
 nous donne : $\exists ! A \in E$ tel que $f(A) = A - \frac{1}{2}(A^2 - B) = A$

d'où $\underline{A^2 = B}$.



de plus si $X \in E$ et $X^2 = A$, on a $f(X) = X$ et par
 unicité on a $\underline{X = A}$

Exercice 3 (Voir TD 2 exercice 4). 8 points = ~~(1+1)~~ + 1 + 1 + (1+1) +


 J. Brango